ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.12 1981

Г.Л.Свешникова

# КОНГРУЭНЦИИ $\mathcal{J}_3$ .

В трехмерном проективном пространстве исследуются конгруэнции $\mathcal{J}$ [4] кривых $C$ второго порядка (коник) с одной вырождающейся в линию фокальной поверхностью, которые определяются специальными условиями. Рассмотрение ведется в репере $R=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, который построен в работе [4].

## § I. Конгруэнции $\mathcal{J}_3$ .

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией $\mathcal{J}_3$ называется конгруэнция $\mathcal{J}$ ,для которой выполняются условия: 1/точка $A_3$ совпадает с характеристической точкой плоскости коники; 2/ $f$ -сеть [1] является асимптотической сетью на поверхности $(A_3)$; 3/существует расслоение от конгруэнции коник $(C)$ к прямолинейной конгруэнции $(A_3A_4)$ [1]и от прямолинейной конгруэнции $(A_3A_4)$ к прямолинейной конгруэнции $(A_1A_2)$ [2]; 4/касательные плоскости к поверхностям $(A_1)$и $(A_2)$пересекают касательную к фокальной линии $(F)$ $(F=A_1+A_2-\sqrt{2}A_3)$ конгруэнции коник в точке $A_4$.

Конгруэнции $\mathcal{J}_3$ существуют и определяются вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа:

$$
\begin{gathered}
\omega_i^j=0, \quad \omega_i^3=(1-\Gamma)\omega_i+\Gamma\omega_j, \quad \omega_3^i=\omega_j, \quad \omega_3^4=0, \\
\omega_4^1=\Gamma(\omega_1+\omega_2), \quad \omega_4^1-\omega_4^2=0, \quad \omega_4^3=-\sqrt{2}\,\omega_4^1, \qquad (1) \\
\omega_1^1=\frac{\sqrt{2}}{2}(\omega_2-\omega_1), \quad \omega_1^1+\omega_2^2=0, \quad \omega_3^3=\omega_4^4=0, \\
d\Gamma+\sqrt{2}\,\Gamma(\omega_1+\omega_2)=0,
\end{gathered}
$$



причем $i,j,k=1,2;$ $i\neq j$; по индексам $i$ и $j$ суммирование не производится.

## § 2. Геометрические свойства конгруэнции $\mathcal{J}_3$ .

Конгруэнции $\mathcal{J}_3$ обладают следующими геометрическими свойствами: 1/торсы прямолинейных конгруэнций $(A_1A_2)$ и $(A_3A_4)$ соответствуют, фокусы $E_{12}=A_1+A_2$ и $E^*_{12}=A_1-A_2$ луча $A_1A_2$ гармонически делят точки $A_1$ и $A_2$ ; 2/касательные на поверхностях $(A_i)$ к асимптотическим линиям $\omega_i+2\Gamma\omega_j=0$ пересекаются в одной точке ребра $A_3A_4$; 3/ вырождающаяся в линию фокальная поверхность $(F)$ является прямой; 4/ фокусами луча $A_3A_4$ являются точки $A_4$ и $K=2\Gamma A_3-A_4$ ,причем фокальная поверхность $(A_4)$ является прямой; 5/ асимптотические линии на поверхностях $(K)$ и $(A_3)$ соответствуют; 6/асимптотические касательные на поверхности $(K)$ гармонически делят точки $E^*_{12}$ и $A_3$ ; 7/точки $E_{34}=A_3+A_4$ и $P=(1-2\Gamma)A_3+A_4$ ребра $A_3A_4$ являются двойными точками гомографии [3] фокальных поверхностей $(A_i)$.

Т е о р е м а. Фокусы коники $C$ конгруэнции $\mathcal{J}_3$, отличные от $A_i$ ,являются точками пересечения прямых $E_{12}A_3$ и $E^*_{12}A_3$ с коникой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Коника $C$ в репере $R$ [4] задается уравнениями:

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0, \quad x^4=0.$$

Система уравнений, определяющая фокусы коники $C$ ,отличные от точек $A_i$ ,имеет вид;

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0, \quad x^4=0, \quad (x^1)^2-(x^2)^2=0,$$

из которой получаем фокусы $F_{i,k}$ коники $C$ :

$$F_{i,k}=A_j+(-1)^jA_i+(-1)^k\sqrt{(-1)^j2}\;A_3.$$

Точки $F_{i,k}$ являются точками пересечения с коникой $C$ прямых $E_{12}A_3$ и $E^*_{12}A_3$ .

Для фокальной поверхности $(K)$ прямолинейной конгруэнции $(A_3 A_4)$ получена квадрика Ли $Q$, ее уравнение имеет вид:

$$2x^1x^2 - \Gamma(x^1+x^2)^2 + \sqrt{2}\,x^3(x^1+x^2) + (x^3+2\Gamma x^4)^2 = 0.$$

Конгруэнция $(Q)$ квадрик $Q$ имеет 8 фокальных поверхностей. Точка $K$ является четырехкратным фокусом квадрики $Q$. Остальные четыре фокуса являются точками пересечения с квадрикой $Q$ прямых $FA_3$ и $EE^*_{12}$, где $E$ -фокус луча $E_{12}P$ прямолинейной конгруэнции $(E_{12}P)$, и имеют аналитический вид:

$$\Phi_{1,2} = F \pm 2\sqrt{\Gamma}A_3; \quad \Phi_{3,4} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}E_{12} + P \pm \sqrt{\Gamma}E^*_{12}.$$

### Список литературы


I.М а л а х о в с к и й В.С. Расслояемые пары конгруэнций фигур.-Тр.геометрич.семинара.М., ВИНИТИ, 3, I97I, с.193-220.

2.Фин и к о в С.П. Теория пар конгруэнций.М., ГИТТЛ, 1956.

3.Ф и н и к о в С.П. Асимптотически сопряженные двойные линии Ермолаева.- Уч.зап.Моск.пед.ин-та, I95I, № I6, вып3, с.235-260.

4.С в е ш н и к о в а Г.Л. Конгруэнции кривых второго порядка с одной вырождающейся фокальной поверхностью. - В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3. Калининград, 1973, с.113-125.






Е.К.С е л ь д ю к о в

## СЕТИ, ПРИСОЕДИНЕННЫЕ К ЗАДАННЫМ СЕМЕЙСТВАМ ЛИНИЙ НА $V_p \subset E_n$

В работе рассмотрены сети, присоединенные к заданной $m$-ткани на $p$-поверхности $n$-мерного евклидова пространства.

I.Пусть поверхность $V_p \subset E_n$ отнесена к подвижному полуортогональному реперу $(x, \vec{e}_{\mathcal{J}}, \vec{e}_A)$, где орты $\vec{e}_{\mathcal{J}}$ $(\mathcal{J}=1,\dots,p)$ принадлежат касательной плоскости $T_p(x)$ к поверхности в точке $x$, а векторы $\vec{e}_A$ $(A=p+1,\dots,n)$ образуют ортонормированный базис ортогонального дополнения. $N_{n-p}(x)$ касательной плоскости $T_p(x)$, причем первые $q$ векторов $\vec{e}_a$ $(a=p+1,\dots,p+q)$ из системы $\{\vec{e}_A\}$ расположены в главной нормали $N_q(x)$ поверхности $V_p$ [1]. Имеем: $d\vec{x} = \omega^{\mathcal{J}}\vec{e}_{\mathcal{J}}$, $d\vec{e}_{\mathcal{J}} = \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}}\vec{e}_{\mathcal{J}} + \omega^a_{\mathcal{J}}\vec{e}_a$,

$$d\vec{e}_a = \omega^{\mathcal{J}}_a\vec{e}_{\mathcal{J}} + \omega^b_a\vec{e}_b + \omega^\sigma_a\vec{e}_\sigma, \quad d\vec{e}_\sigma = \omega^a_\sigma\vec{e}_a + \omega^\delta_\sigma\vec{e}_\delta,$$

$$(\sigma, \delta = p+q+1,\dots,n).$$

Поверхность $V_p$ определяется системой уравнений $\omega^A = 0$, продолжая которую, получим $\omega^A_{\mathcal{J}} = b^A_{\mathcal{J}\mathcal{J}}\omega^{\mathcal{J}}$, $b^A_{\mathcal{J}\mathcal{J}} = b^A_{\mathcal{J}\mathcal{J}}$, где функции $b^A_{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ определяют поле второго основного тензора поверхности, причем $b^\sigma_{\mathcal{J}\mathcal{J}} = 0$.

Рассмотрим на поверхности $V_p$ $m$-ткань $(m<p)$. Эта ткань определяет на поверхности распределение $\Delta_m$, которое в свою очередь определяет на этой поверхности ортогонально-дополнительное ему распределение $\Delta_{p-m}$. Расположим векторы $\vec{e}_i$ $(i=1,\dots,m)$ на касательных к линиям заданной $m$-ткани в точке $x$, а векторы $\vec{e}_\alpha$ $(\alpha=m+1,\dots,p)$ в $\Delta_{p-m}(x)$.